1 Discuteix la posició relativa dels plans $\pi_1 : ax + y + az = 0$ **i** $\pi_2 : (a+3)x + \left(\frac{1}{a}\right)y + z = 1$ **segons els valors de** $a \neq 0$

Els plans són paral·lels quan els vectors normals són proporcionals

$$\frac{a}{a+3} = \frac{1}{1/a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \frac{a}{a+3} \Rightarrow a^2 + 3a = a \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

Quan $a = -2$ els plans són paral·lels, altres valors secants

2 Troba a i b per tal que els tres plans següents passin per una mateixa recta

$\pi_1 : x + 2y - z = 1$

$\pi_2 : 2x + y + az = 0$

$\pi_3 : 3x + 3y - 2z = b$

El sistema format per les tres equacions ha de ser compatible determinat de rang dos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & 3 & -2 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2-a & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3-b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2-a & 2 \\ 0 & 3 & -1-a & -1+b \end{pmatrix}$$

El sistema tindrà rang 2 quan

$-1 - a = 0 \Rightarrow a = -1$

$-1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$

3 Hi ha algun valor de k pel qual els quatre plans tinguin un punt en comú? Si és així troba aquest punt

$\pi_1 : x + 2z - 3 = 0$

$\pi_2 : 3x + y + z = -1$

$\pi_3 : 2y - z + 2 = 0$

$\pi_4 : x + y + kz + 5 = 0$

Resolem el sistema format per les tres primeres equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

El sistema és compatible determinat i les solucions són z=2, y=0 i x=-1. Si substituïm a la quarta equació obtenim

$-1 + 0 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow k = -2$

4 Estudia la posició relativa de la recta $r : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$ **i el pla** $\pi : 3x + 2y - z = -3$

Formem el sistema

$$\begin{cases} y = z-3 \\ 2x+4 = 3y \\ 3x+2y-z=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -13 & 2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -45 \end{pmatrix}$$

El sistema és compatible determinat. La recta i el pla es tallen en un punt de coordenades la solució del sistema, és el punt

$$\left(-\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{45}{11}\right)$$

5 Calcula els valors de m i n per tal que el pla $\pi: nx+my-z-2=0$ contingui la recta $r: \begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+z=4 \end{cases}$

Calculem dos punts qualssevol de la recta, per exemple $(0,-3,4)$ i $(3,3,1)$. Si demanem que aquests punts formin part del pla obtenim

$-3m-4-2=0 \Rightarrow m=-2$

$3n+3m-1-2=0 \Rightarrow n=3$

7 Considera la recta $r: \begin{cases} 3x-y+2z-1=0 \\ x+4y+z-b=0 \end{cases}$ i el pla $\pi: 2x-5y+az+2=0$.

Determina els valors de a i b per tal que a) r i π siguin secants. Troba el punt d'intersecció. b) r i π siguin paral·lels. c) la recta r estigui continguda en el pla π.

Formem el sistema d'equacions de recta i pla

$$\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \\ 2x-5y+az=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & b \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & 13 & 1 & 3b-1 \\ 0 & 13 & 2-a & 2b+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & 13 & 1 & 3b-1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$ el sistema és compatible determinat, té un punt d'intersecció. Les solucions del punt d'intersecció es calculen en funció de a i b, per exemple

$$z = \frac{b-3}{a-1} \quad a \neq 1$$

Si a=1 i $b \neq 3$ el sistema és incompatible. La recta i el pla són paral·lels i no tenen cap punt de contacte.

Si a=1 i b=3 el sistema és compatible indeterminat, la solució és una recta. La recta està continguda en el pla

8 Considera les rectes $r:\begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$ **i** $s\ :\ \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{a}$**, on a és una constant.**

Comprova que aquestes dues rectes són secants per a qualsevol valor de a i determina el valor de a per tal que siguin perpendiculars

De la segona recta obtenim el punt (1,1,1) que verifica també l'equació de la primera. Aquest és el punt comú a les dues. Les rectes són secants.
El vector director de la primera recta és (1,0,1) i el de la segona (2,1,a). Per ser perpendiculars el seu producte escalar ha de ser zero

$(1,0,1)\cdot(2,1,a) = 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$

El sistema format per les dues rectes és

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \\ x - 1 = y - 1 \\ ay - a = z - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que forma un sistema compatible determinat de solucions z=1, y=1 i x=1

9 Estudia les posicions relatives de les restes r i s

$r:\frac{2x-1}{4} = \frac{4y-1}{2} = z$ $\qquad$ $s:\begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$

Analitzem el sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 = 4z \\ 4y - 1 = 2z \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -78 & 13 \\ 0 & 0 & 26 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -78 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -676 \end{pmatrix}$$

El sistema és incompatible, les rectes s'encreuen
Una segona manera de fer aquest exercici és determinar de cada recta un punt i el vector director. De la primera recta, transformant l'equació

$$r:\frac{2x-1}{4} = \frac{4y-1}{2} = z \quad \rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = z$$

el punt és $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right)$ i el vector $v\left(2,\frac{1}{2}.1\right)$. De la segona recta hem de resoldre el sistema en funció del paràmetre z

$$s:\begin{cases}3x-y+3z=0\\ x+4y+z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+4y=-z\\ 3x-y=-3z\end{cases}$$

Si resolem obtenim

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-z & 4\\ -3z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{13z}{-13}=-z\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -z\\ 3 & -3z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{0}{-13}=0$$

Les equacions en funció de z són

$$\begin{cases}x=-z\\ y=0\\ z=z\end{cases}$$

d'on obtenim el punt $B(0,0,0)$ i el vector $w(-1,0,1)$

Considerem el determinant format pels dos vectors directors i un tercer vector que uneix els punts de cada recta. Si el determinant és 0 els tres vectors estaran en el mateix pla i les rectes es tallen en un punt. Si el determinant és diferent de zero els vectors no estan en el mateix pla i les rectes es creuen

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{vmatrix}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\neq 0$$

10 Explica la relació que hi ha entre el vector associat a un pla i un vector director d'una recta perpendicular a aquest. Troba l'equació del pla que conté el punt (1,1,0) i és perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x+y-2z+1=0\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}$

La recta r té de vector director

$$r:\begin{cases}x+y-2z+1=0\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=k\\ y=-1+5k\\ z=3k\end{cases}$$

el vector (1,5,3). L'equació del pla demanat és de la forma $x+5y+3z=D$, si ha de passar per (1,1,0) ha de ser D=6 i l'equació $x+5y+3z=6$

Si fem el producte vectorial dels vectors normals als dos plans que determinen la recta obtenim també el vector associat al pla

$$\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}\rightarrow(-1,-5,-3)$$

11 Troba l'equació de la recta projecció ortogonal de $r:\begin{cases} x-2y+5z=9 \\ -2x+3y+z+3=0 \end{cases}$ **sobre el pla** $\pi: 2x+2y-z+6=0$

Hem de calcular la intersecció del pla amb el pla que conté la recta i és perpendicular al pla donat
La recta r en equacions paramètriques

$$r:\begin{cases} x-2y+5z=9 \\ -2x+3y+z+3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-21+17z \\ y=-15+11z \\ z=z \end{cases}$$

d'on un punt de la recta és (-21,-15,0) i el seu vector director (17,11,1). El pla que conté aquesta recta i és perpendicular al pla donat, de vector normal (2,2,-1) té d'equació

$$\begin{vmatrix} x+21 & 17 & 2 \\ y+15 & 11 & 2 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -13x+19y+12z+12=0$$

La recta projecció ortogonal la podem donar com intersecció dels dos plans

$$s:\begin{cases} 2x+2y-z+6=0 \\ -13x+19y+12z+12=0 \end{cases}$$

12 Sigui el punt $P_1(1,0,-1)$**,** P_2 **el punt simètric de** P_1 **respecte del pla d'equació** $x-2y=0$**, i** P_3 **el simètric de** P_2 **respecte del pla d'equació** $x+2y+z=1$**. Troba l'equació general del pla determinat pels punts** P_1**,** P_2 **i** P_3

El pla ve determinat per un punt, en aquest cas $P_1(1,0,-1)$, i dos vectors directors. Un vector és el que uneix P_1 i P_2, i aquest vector és proporcional al vector normal del primer pla, (1,-2,0). El segon vector és el que uneix els punts P_2 i P_3 i que és proporcional al vector normal del segon pla (1,2,1)
L'equació del pla demanat és

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & -2 & 2 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -2x-y+4z+6=0$$

13 Determina l'equació del pla que passa per P(1,2,1) i conté la recta intersecció dels plans $\pi: x-2y+z=3$ **i el pla YZ**

Calculem l'equació de la recta intersecció dels plans

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=3+2y \end{cases}$$

De l'equació de la recta obtenim el punt (0,0,3) i el vector director (0,1,2)
El pla demanat passa per (1,2,1) i té de vector director el vector de la recta (0,1,2) i el vector definit pel punt (0,0,3) de la recta i (1,2,1) que és (1,2,-2)
Podem formar

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z-1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x-2y+z=3$$

14 Comprova que les rectes

$r: x-1=y=z-2$ $\qquad s:\begin{cases} x-z=5 \\ y-z=2 \end{cases}$

Són paral·leles i escriu l'equació del pla que les conté

El vector director de la primera és (1,1,1)
La segona recta en forma paramètrica

$$s:\begin{cases} x-z=5 \\ y-z=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=5+z \\ y=2+z \\ z=z \end{cases}$$

d'on veiem que el vector director és el mateix. Per calcular l'equació del pla ens cal un punt, per exemple el de la primera recta (1,0,2), el vector director (1,1,1) i un segon vector que formen d'un punt de cada recta, (1,0,2) de la primera i (5,2,0) de la segona

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 2 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -2x+3y-z=-4$$

15 Escriu l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela a la recta $r:\begin{cases} 3x-2y+3z=5 \\ 4x-y+z=7 \end{cases}$

Trobem el vector director de la recta r resolen el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

la segona fila dóna $-5y+9z=-1 \quad \Rightarrow y=\dfrac{9z+1}{5}$

i a la primera equació

$$3x-2\left(\frac{9z+1}{5}\right)+3z=5 \quad \Rightarrow \frac{15x-18z-2+15z}{5}=5 \Rightarrow$$

$$15x-3z-2=25 \Rightarrow x=\frac{27+3z}{15}$$

Les solucions són

$$\begin{cases} x=\dfrac{27+3z}{15} \\ y=\dfrac{9z+1}{5} \\ z=z \end{cases}$$

i el vector director $\left(\frac{3}{15},\frac{9}{5},1\right) \approx (3,27,15) \approx (1,9,5)$

La recta que passa per l'origen i té aquest vector director és

$(x,y,z) = k(1,9,5) \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{9} = \frac{z}{5}$

Es pot obtenir el vector director a partir del producte vectorial dels dos vectors normals als plans

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow (1,9,5)$$

16 Sigui la recta r d'equació $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$**. Troba l'equació cartesiana del pla que conté la recta r i es perpendicular al pla y=0**

Si el pla ha de ser perpendicular al pla y=0 un dels seus vectors directors és (0,1,0).
Trobem un punt i el segon vector de l'equació de la recta
Si restem les equacions obtenim

$x - z = 0 \Rightarrow x = z$

si substituïm a la primera $y = 0$

Les equacions paramètriques de la recta són

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

un punt és (0,0,0) i el vector director (1,0,1)
L'equació del pla

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z - x = 0 \Rightarrow -x + z = 0$$

17 Troba l'equació de la recta que passa pel punt P(-1,0,0) i és paral·lela als plans $\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0$ **i** $\pi_2 : x + 3y + z = 5$

La recta ha de ser paral·lela a la intersecció dels dos plans

$$\begin{cases} 2x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = z - 1 \\ x + 3y = 5 - z \end{cases}$$

si resolem en funció de z

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z-1 & -1 \\ 5-z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3z - 3 + 5 - z}{7} = \frac{2z+2}{7}\ ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & z-1 \\ 1 & 5-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 2z - z + 1}{7} = \frac{11 - 3z}{7}$$

i el vector director és $\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},1\right) \approx (2,-3,7)$

L'equació de la recta és
$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{7}$$

18 Escriu l'equació del pla perpendicular a la recta que passa pels punts P(2,-1,3) i Q(-3,1,-2) i que conté el punt mitjà del segment PQ

El vector d'inici P i final Q és (-5,2,-5), aquest vector dóna els coeficients de l'equació del pla
El punt mitjà del segment és
$$M = P+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=(2,-1,3)+\frac{1}{2}(-5,2,-5)=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$
L'equació del pla és $-5x+2y-5z=D$, si ha de passar pel punt M podem calcular D
$$-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 0-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=D\Rightarrow D=0$$
L'equació del pla és
$$-5x+2y-5z=0$$

19 Determina si la recta $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{5}$ i el pla $3x+2y+5=0$ són paral·lels. Es troba la recta continguda en el pla?

El vector director de la recta (2,-3,5) i el vector normal del pla (3,2,0) han de ser perpendiculars si pla i recta són paral·leles
El producte escalar dels dos vectors és zero, recta i pla són paral·leles
$$(2,-3,5)\cdot(3,2,0)=0$$
Un punt de la recta és (3,1,-1), mirem si aquest punt verifica l'equació del pla
$$3\cdot 3+2\cdot 1+5\neq 0$$
Aleshores la recta no està continguda en el pla

20 Considera la recta $r:\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=6+\lambda\end{cases}$ i la recta $s: x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$. Comprova que les dues rectes s'encreuen. Dóna les coordenades d'un punt P de r i un punt Q de s que verifiquin la condició que la recta PQ sigui la perpendicular comuna a r i s

Formem el determinat dels vectors directors de cada recta (1,1,1) i (1,2,2), i el vector que uneix un punt de cada una
$$\overrightarrow{PQ}=(2,3,5)$$
El valors del determinant és diferent de zero, els vectors no estan en el mateix pla, les rectes es creuen
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&5\end{vmatrix}\neq 0$$
Considerem ara punts arbitraris de cada recta. De la primera els punts són de la forma
$$(3+\lambda,4+\lambda,6+\lambda)$$

i de la segona
$(1+k,1+2k,1+2k)$
El vector que uneix aquests dos punts arbitraris de cada una de les rectes és
$\overrightarrow{AB}=(-2+k-\lambda,-3+2k-\lambda,-5+2k-\lambda)$
i aquest vector, en el punt demanat, ha de ser perpendicular als dos vectors directors de les rectes
$(-2+k-\lambda,-3+2k-\lambda,-5+2k-\lambda)\cdot(1,1,1)=0\Rightarrow$
$-2+k-\lambda-3+2k-\lambda-5+2k-\lambda=0\Rightarrow 5k-3\lambda=10$

$(-2+k-\lambda,-3+2k-\lambda,-5+2k-\lambda)\cdot(1,2,2)=0\Rightarrow$
$-2+k-\lambda+2(-3+2k-\lambda)+2(-5+2k-\lambda)=0\Rightarrow 9k-5\lambda=18$
Les solucions del sistema
$$\begin{cases}5k-3\lambda=10\\ 9k-5\lambda=18\end{cases}$$
son $k=2$ i $\lambda=0$
que donen els punts buscats de cada recta. Si $\lambda=0$ el punt de la primera recta és (3,4,6) i si k=2 el punt de la segona és (3,5,5)

21 Donada la recta $r:\begin{cases}2x+(a-5)y-2z=3a-13\\ ay-2z=3a\end{cases}$ **determina a per tal que existeixi un pla que contingui aquesta recta i que sigui perpendicular al vector v(1,1,1). Escriu l'equació cartesiana d'aquest pla**

Un pla perpendicular al vector donat és de la forma $x+y+z=D$
Si restem les equacions que defineixen la recta obtenim $2x-5y=-13$, que és independent de a. Un punt que verifica aquesta condició és (1,3,0), a l'equació del pla ens permet calcular D
$x+y+z=D\quad\Rightarrow 1+3+0=D\quad\Rightarrow D=4$

22 Determina k per tal que existeixi un pla que contingui la recta $r:\begin{cases}x-2y-6z=1\\ 2x-2y-3z=6\end{cases}$ **i que sigui perpendicular al vector v(-6,8,k)**

El vector director de la recta cal que sigui perpendicular a (-6,-8,k). Calculem el vector director de la recta r
$$r:\begin{cases}x-2y-6z=1\\ 2x-2y-3z=6\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -2 & -6\\ 2 & -2 & -3\end{vmatrix}\rightarrow(-6,-9,2)$$
on hem fet el producte vectorial dels dos vectors normals dels dos plans que defineixen la recta. Calculem ara
$(-6,8,k)\cdot(-6,-9,2)=36-72+2k=0\Rightarrow 2k=36\quad\Rightarrow k=18$

23 Considera la recta $r:\begin{cases}x-y-3z=1\\ x-3y+z=5\end{cases}$**. Digues si el punt P(6,2,2) es troba a la recta paral·lela a r que passa per l'origen de coordenades**

Calculem el vector director de la recta r

$$r:\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases} \to \begin{cases} x=-1+5z \\ y=-2+2z \\ z=z \end{cases} \to v=(5,2,1)$$

La recta paral·lela a r que passa per l'origen és

$$\begin{cases} x=5k \\ y=2k \\ z=k \end{cases}$$

el punt (6,2,2) no verifica aquestes equacions

24 Considera l'equació $(x+y+z)^2+(3x-y+2z-1)^2=0$. Raona i dóna una interpretació geomètrica dels punts P(x,y,z) que verifiques aquesta equació. No cal desenvolupar els quadrats

Si la suma de dos quadrats és zero, cada un dels factors ha de ser zero. Si igualem cada un dels factors a zero obtenim dos plans. La seva intersecció és una recta donat que són plans no paral·lels

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=1 \end{cases}$$